Согласование коррелированных результатов измерений при совокупном ограничении на область возможных значений в виде эллипса

К. К. Семенов
Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
semenov_kk@spbstu.ru

В. А. Гаранин
Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
garanin_va@spbstu.ru

Аннотация. **Развитие вычислительных технологий и цифровизации производств привели к росту числа объектов измерения, для которых составлены математические модели, связывающие в том числе и значения измеряемых величин между собой. За счет данной информации результаты выполняемых на таких объектах совместных измерений могут быть уточнены за счет процедуры согласования (кооптации известных сведений). В данном докладе представлена замкнутая аналитическая модель согласования результатов измерений, учитывающая наличие корреляций между согласуемыми результатами измерений для случая, когда область возможных значений измеряемых величин ограничена эллипсом при кооптации информации в форме системы линейных алгебраических уравнений. Приведены соответствующие выражения для оценки получаемых уточненных оценок значений измеряемых величин.**

Ключевые слова: согласование результатов измерений, ковариационная матрица, коррелированные результаты измерений, учет априорной информации, условная оптимизация, условия Каруша–Куна–Таккера

I. Введение

Задача согласования результатов совместных измерений, выполняемых на объекте, для которого доступны информация о взаимосвязях между его характеристиками и параметрами состояния, выраженная в виде математической модели и/или системы ограничений в виде неравенств, позволяет повысить точность конечных результатов за счет кооптации всей имеющихся в наличии данных [1, 2]. Данная процедура представляет собой неотъемлемую часть математической обработки индустриальных данных, получаемых в ходе результатов совместных измерений, выполняемых на технологических установках и промышленных предприятиях [3, 4]. По сути дела, процедура согласования данных выражает преобразования накопленной ранее информации об объекте измерений в точность результатов текущих выполняемых на нем измерений [5].

Как правило, процедура согласования результатов измерений подразумевает привлечение ряда предположений [6–8]: о нормальном распределении погрешностей выполняемых измерений, об их независимости, о точности той математической модели объекта измерений, что кооптируется в ходе процедуры согласования. Для случая, когда действительное распределение погрешностей отличается от нормального, к настоящему времени разработаны процедуры непараметрического согласования результатов измерений [9, 10], допускающие представление информации о взаимосвязях между измеряемыми величинами (по сути дела – об объекте измерений) в форме систем уравнений (возможно, нелинейных и неравенств). Для согласования же в подобных ограничениях коррелированных результатов измерений подобных работ в настоящее время в литературе не представлено – подходы [11–14], учитывающие возможную корреляцию между результатами совместных измерений через ковариационную матрицу совместного распределения, разработаны для случая линейных ограничений и не допускают кооптации информации в виде неравенств.

Данная работа устраняет соответствующий пропуск в литературе и предлагает подход к согласованию коррелированных результатов измерений при совокупном ограничении на область возможных значений согласуемых величин эллипсом. В статье представлена математическая модель согласования индустриальных неточных данных, между значениями которых присутствуют значимые корреляции.

II. Условия Каруша–Куна–Таккера для задачи согласования данных

В работах [15, 16] предложено аналитическое решение задачи условной оптимизации, удовлетворяющей условиям Каруша–Куна–Таккера [17], изначально предназначенное для решений задач управления. Вместе с тем постановка задачи в упомянутых работах допускает ее распространение и на задачи согласования результатов измерений в условиях, когда их погрешности имеют нормальный закон распределения.

Постановку задачи работ [15, 16] для задачи согласования индустриальных данных возможно переписать в следующем виде. Пусть $\mathbf{x}$ – вектор результатов однократных равноточных независимых совместных измерений (размера n), $\mathbf{\Delta x}$ – вектор абсолютных погрешностей, имеющих нормальное распределение, $\mathbf{x}^*$ – значения измеряемых величин (с

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-20141, https://rscf.ru/project/25-29-20141/, и средств гранта Санкт-Петербургского научного фонда № 25-29-20141.

которыми в идеальной ситуации должны совпасть результаты согласования), $\mathbf{\Delta x}^*$ – поправки в результаты измерений, вносимые в ходе процедуры их согласования. Результаты работы [15, 16] показывают, что при соблюдении условий Каруша–Куна–Таккера

$$\mathbf{\Delta x}^* = \arg \min_{\substack{\mathbf{\Delta x}: A\cdot\mathbf{\Delta x}=\mathbf{u},\\ (\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d})^T\cdot(\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d})\le r^2}} \|\mathbf{\Delta x}\|_2^2 \qquad (1)$$

при наложенных на допустимые значения $\mathbf{\Delta x}$ совокупных ограничений в виде системы линейных алгебраических уравнений и границ эллипсоида. Здесь $\|\mathbf{\Delta x}\|_2^2 = \mathbf{\Delta x}^T\cdot\mathbf{\Delta x}$ – Евклидова норма вектора $\mathbf{\Delta x}$.

Из работ [15, 16] следует, что аналитическое решение задачи (1) имеет вид

$$\mathbf{\Delta x}^* = \mathbf{\Delta x} + P\cdot(A\cdot\mathbf{\Delta x}-\mathbf{u}) + \lambda\cdot(1+\lambda)^{-1}\cdot D\cdot(\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d}),$$

где $D = E_n - A^T\cdot(A\cdot A^T)^{-1}\cdot A$; E_n – единичная матрица размером $n\times n$; n – размер векторов $\mathbf{\Delta x}$ и $\mathbf{d}$; $P = A^T\cdot(A\cdot A^T)^{-1}$;

множители Лагранжа λ определяются решением квадратного уравнения

$$a\cdot\lambda^2 + h\cdot\lambda + q = 0,$$

$$a = (A\cdot\mathbf{\Delta x}-\mathbf{u})^T\cdot P^T\cdot P\cdot(A\cdot\mathbf{\Delta x}-\mathbf{u}) -$$
$$-(A\cdot\mathbf{\Delta x}-\mathbf{u})^T\cdot P^T\cdot(\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d}) - (\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d})^T\cdot P\cdot(A\cdot\mathbf{\Delta x}-\mathbf{u}) +$$
$$+(\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d})^T\cdot(\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d}) - (\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d})^T\cdot D\cdot(\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d}) - r^2,$$

$$h = 2\cdot a,$$

$$q = a + (\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d})^T\cdot D\cdot(\mathbf{\Delta x}-\mathbf{d}).$$

Величина реализованной погрешности $\mathbf{\Delta x}$ нам неизвестна, поэтому необходимо исключить ее из итогового решения. Поскольку $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} - \mathbf{\Delta x}^*$, то получаем, что (1) может быть переписано в форме

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} - \arg \min_{\substack{\mathbf{\Delta x}: A\cdot\mathbf{\Delta x}=A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b},\\ (\mathbf{\Delta x}-(\mathbf{x}-\mathbf{c}))^T\cdot(\mathbf{\Delta x}-(\mathbf{x}-\mathbf{c}))\le r^2}} \|\mathbf{\Delta x}\|_2^2, \qquad (2)$$

где ограничения наложены уже на значения $\mathbf{x}^*$: теперь должны быть удовлетворены система линейных алгебраических уравнений $A\cdot\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ и неравенство $(\mathbf{x}^*-\mathbf{c})^T\cdot(\mathbf{x}^*-\mathbf{c}) \le r^2$, из которых как раз и эквивалентно следует, что для реализованной погрешности справедливы ограничения того же вида, что и в (1), т.е.

$$A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{\Delta x}^*) = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{u} = A\cdot\mathbf{\Delta x}^* = A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}$$

и

$$(\mathbf{x}-\mathbf{\Delta x}^*-\mathbf{c})^T\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{\Delta x}^*-\mathbf{c}) \le r^2,$$

$$\left(\mathbf{\Delta x}^*-(\mathbf{x}-\mathbf{c})\right)^T\cdot\left(\mathbf{\Delta x}^*-(\mathbf{x}-\mathbf{c})\right) \le r^2,$$

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{x}-\mathbf{c}.$$

В соответствии с соотношениями, приведенными выше, аналитическое решение задачи (2) имеет вид

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + P\cdot(A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}) + \lambda\cdot(1+\lambda)^{-1}\cdot D\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{c}), \qquad (3)$$

где n – размер векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{c}$; матрицы D и P имеют тот же вид, что и выше, а множители Лагранжа λ определяются решением квадратного уравнения

$$a\cdot\lambda^2 + h\cdot\lambda + q = 0,$$

$$a = (A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b})^T\cdot P^T\cdot P\cdot(A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}) -$$
$$-(A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b})^T\cdot P^T\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{c}) - (\mathbf{x}-\mathbf{c})^T\cdot P\cdot(A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}) +$$
$$+(\mathbf{x}-\mathbf{c})^T\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{c}) - (\mathbf{x}-\mathbf{c})^T\cdot D\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{c}) - r^2,$$

$$h = 2\cdot a,$$

$$q = a + (\mathbf{x}-\mathbf{c})^T\cdot D\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{c}).$$

Соотношение (3) определяет решение задачи согласования равноточных независимых однократных результатов совместных измерений для случая, когда их погрешности имеют нормальный закон распределения, а ограничения на возможные значения измеряемых величин заданы системой линейных уравнений и границами эллипсоида. Как видим, данное решение представляет собой замкнутое выражение, в котором участвует как математическая модель объекта измерения (через матрицу A, вектора $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и значение r^2), так и сами результаты измерений $\mathbf{x}$. Соотношения (3) допускают прямой непосредственный расчет результатов процедуры согласования, которые отвечают решению соответствующей оптимизационной задачи (2), без применения итерационных процедур. Отметим также, что для полученных выражений предполагается, что кооптируемая информация не допускает возможности определения значений $\mathbf{x}^*$ без результатов измерений $\mathbf{x}$ (т.е. размер вектора $\mathbf{b}$ строго меньше n).

Распространим данный результат, исходя из постановки (2) на случай неравноточных и коррелированных результатов измерений.

III. Слабо коррелированные слабо неравноточные совместные измерения

Рассмотрим случай неравноточных измерений и учтем корреляции между результатами измерений (компонентами вектора $\mathbf{x}$). Для этого видоизменим используемую норму вектора $\mathbf{x}$ с Евклидовой на взвешенную Евклидову: $\|\mathbf{x}\|_\Sigma^2 = \mathbf{x}^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot\mathbf{x}$, где Σ – ковариационная матрица для вектора $\mathbf{x}$ (размера $n\times n$).

Соответственно задача (2) приобретет вид

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} - \arg \min_{\substack{\mathbf{\Delta x}: A\cdot\mathbf{\Delta x}=A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b},\\ (\mathbf{\Delta x}-(\mathbf{x}-\mathbf{c}))^T\cdot(\mathbf{\Delta x}-(\mathbf{x}-\mathbf{c}))\le r^2}} \|\mathbf{\Delta x}\|_\Sigma^2, \qquad (4)$$

Для задач условной оптимизации (2) и (4) выпишем соответствующие им функции Лагранжа $L_{(2)}$ и $L_{(4)}$, используя для краткости обозначение $\mathbf{b}^* = A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}$:

$$L_{(2)} = \|\mathbf{\Delta x}\|_2^2 + \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(2)}}^T\cdot(A\cdot\mathbf{\Delta x}-\mathbf{b}^*) +$$
$$+\lambda_{(2)}\cdot\left((\mathbf{\Delta x}-(\mathbf{x}-\mathbf{c}))^T\cdot\left(\mathbf{\Delta x}-(\mathbf{x}-\mathbf{c})\right)-r^2\right),$$

$$L_{(4)} = \|\mathbf{\Delta x}\|_\Sigma^2 + \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(4)}}^T\cdot(A\cdot\mathbf{\Delta x}-\mathbf{b}^*) +$$
$$+\lambda_{(4)}\cdot\left((\mathbf{\Delta x}-(\mathbf{x}-\mathbf{c}))^T\cdot\left(\mathbf{\Delta x}-(\mathbf{x}-\mathbf{c})\right)-r^2\right),$$

где $\lambda_{(2)}$ и $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(2)}}$, $\lambda_{(4)}$ и $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(4)}}$ – соответствующие множители Лагранжа для указанных задач (2) и (4).

Необходимыми условиями достижения оптимума в (2) и (4) согласно условиям Каруша-Куна-Таккера являются равенства нулю всех частных производных, включая производную по $\mathbf{\Delta x}$. В силу симметричности матрицы Σ (коммутативности оператора ковариации), получаем для задачи (2) систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L_{(2)}}{\partial \mathbf{\Delta x}} = 2 \cdot \mathbf{\Delta x} + A^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(2)}} + 2 \cdot \lambda_{(2)} \cdot (\mathbf{\Delta x} - (\mathbf{x} - \mathbf{c})) = \mathbf{0}_n, \\ \frac{\partial L_{(2)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(2)}}} = A \cdot \mathbf{\Delta x} - \mathbf{b}^* = \mathbf{0}_m, \\ \frac{\partial L_{(2)}}{\partial \lambda_{(2)}} = (\mathbf{\Delta x} - (\mathbf{x} - \mathbf{c}))^T \cdot (\mathbf{\Delta x} - (\mathbf{x} - \mathbf{c})) - r^2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

а для задачи (4) – систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L_{(4)}}{\partial \mathbf{\Delta x}} = 2 \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} + A^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(4)}} + 2 \cdot \lambda_{(4)} \cdot (\mathbf{\Delta x} - (\mathbf{x} - \mathbf{c})) = \mathbf{0}_n, \\ \frac{\partial L_{(4)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(4)}}} = A \cdot \mathbf{\Delta x} - \mathbf{b}^* = \mathbf{0}_m, \\ \frac{\partial L_{(4)}}{\partial \lambda_{(4)}} = (\mathbf{\Delta x} - (\mathbf{x} - \mathbf{c}))^T \cdot (\mathbf{\Delta x} - (\mathbf{x} - \mathbf{c})) - r^2 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

Пусть $\Sigma = Q \cdot Q^T = Q^T \cdot Q$ – разложение Холецкого ковариационной матрицы Σ, которое всегда существует в силу положительной определенности Σ и ее симметричности, $\det Q \neq 0$. Тогда $\Sigma^{-1} = (Q \cdot Q^T)^{-1} = (Q^T)^{-1} \cdot Q^{-1} = (Q^{-1})^T \cdot Q^{-1}$. Отсюда получаем, что $Q^T \cdot \Sigma^{-1} = Q^{-1}$. Перепишем первое уравнение в (6):

$$2 \cdot Q^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} + Q^T \cdot A^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(4)}} + \\ +2 \cdot \lambda_{(4)} \cdot Q^T \cdot (\mathbf{\Delta x} - (\mathbf{x} - \mathbf{c})) = \mathbf{0}_n,$$

$$2 \cdot Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} + (A \cdot Q)^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(4)}} + 2 \cdot \lambda_{(4)} \cdot Q^T \cdot (\mathbf{\Delta x} - (\mathbf{x} - \mathbf{c})) = \mathbf{0}_n,$$

$$2 \cdot Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} + (A \cdot Q)^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(4)}} + \\ +2 \cdot \lambda_{(4)} \cdot \Sigma \cdot (Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})) = \mathbf{0}_n.$$

Второе уравнение может быть переписано в виде:

$$(A \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x}) - \mathbf{b}^* = \mathbf{0}_m.$$

Третье уравнение аналогичным образом преобразуется к виду:

$$(Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}))^T \cdot \Sigma \cdot (Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})) = r^2.$$

Выполненные выше преобразования приводят в совокупности к системе вида (7):

$$\begin{cases} 2 \cdot Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} + (A \cdot Q)^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(4)}} + \\ +2 \cdot \lambda_{(4)} \cdot \Sigma \cdot (Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})) = \mathbf{0}_n, \\ (A \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x}) - \mathbf{b}^* = \mathbf{0}_m, \\ (Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}))^T \cdot \Sigma \cdot (Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})) = r^2, \end{cases} \quad (7)$$

которое при условиях Каруша–Куна–Таккера соответствует решению задачи условной оптимизации

$$\min_{\substack{\mathbf{\Delta y}: A \cdot Q \cdot \mathbf{\Delta y} = A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}, \\ (\mathbf{\Delta y} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}))^T \cdot \Sigma \cdot (\mathbf{\Delta y} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})) \leq r^2}} \|\mathbf{\Delta y}\|_\Sigma^2,$$

где $\mathbf{\Delta y} = Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x}$. Видим, что воспроизводится вид оптимизационной задачи (4), за исключением ограничения в виде неравенства – в квадратичной форме возникло взвешивание, что противоречит смыслу задачи согласования, поскольку ограничения на возможные значения согласуемых величин не могут и не должны зависеть от точности выполняемых их измерений (которая, суть, и отражается ковариационной матрицей).

Рассмотрим случай малых корреляций и малой степени неравноточности, когда $\Sigma \approx \sigma^2 \cdot E_n$: внедиагональные элементы матрицы $(1/\sigma^2) \cdot \Sigma$ близки к нулю из-за малых значений модуля соответствующих коэффициентов корреляции между компонентами вектора $\mathbf{x}$, а разница между элементами главной диагонали матрицы Σ и значением σ^2 незначительна.

Поскольку операция согласования данных направлена на уточнение результатов измерений, то использование упрощений данной процедуры становится оправданным, если прирост точности после данных упрощений всё же имеет место и при аппроксимации достигаются другие преимущества.

Воспользовавшись соотношением $\Sigma \approx \sigma^2 \cdot E_n$, получаем, что решение задачи (4) может быть приближено решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot \mathbf{\Delta y} + (A \cdot Q)^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0(4)}} + 2 \cdot (\lambda_{(4)} \cdot \sigma^2) \cdot (\mathbf{\Delta y} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})) \approx \mathbf{0}_n, \\ (A \cdot Q) \cdot \mathbf{\Delta y} - \mathbf{b}^* = \mathbf{0}_m, \\ (\mathbf{\Delta y} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}))^T \cdot (\mathbf{\Delta y} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})) \approx \frac{r^2}{\sigma^2}, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, соответствует приближенному решению оптимизационной задачи (4) относительно $\mathbf{\Delta y}$, полностью изоморфному (2). Как следствие, приближенное решение задачи (4) в условиях слабой корреляции между компонентами вектора $\mathbf{x}$ и при слабой неравноточности может быть записано в виде

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + Q \cdot P_Q \cdot (A \cdot Q \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}) + \\ +\lambda \cdot (1 + \lambda)^{-1} \cdot Q \cdot D_Q \cdot Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}), \quad (8)$$

где $D_Q = E_n - Q^T \cdot A^T \cdot (A \cdot \Sigma \cdot A^T)^{-1} \cdot A \cdot Q$,

$P_Q = Q^T \cdot A^T \cdot (A \cdot \Sigma \cdot A^T)^{-1}$,

множители Лагранжа λ определяются решением квадратного уравнения

$$a \cdot \lambda^2 + h \cdot \lambda + q = 0,$$

$$a = (A \cdot Q \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b})^T \cdot P_Q^T \cdot P_Q \cdot (A \cdot Q \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}) - \\ -(A \cdot Q \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b})^T \cdot P_Q^T \cdot Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - \\ -(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (Q^{-1})^T P_Q \cdot (A \cdot Q \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}) + (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - \\ (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (Q^{-1})^T \cdot D_Q \cdot Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - \frac{r^2}{\sigma^2},$$

$$h = 2 \cdot a,$$

$$q = a + (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (Q^{-1})^T \cdot D_Q \cdot Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}).$$

Как видим, данное приближенное решение сохраняет замкнутость формы и может быть получено прямым расчетом без необходимости прибегать к итерационным процедурам.

IV. Решение через неравенство Рэлея

Другим приближенным способом решения поставленной задачи согласования результатов совместных коррелированных измерений может быть ослабление совокупного ограничения в виде неравенства.

Квадратичная форма, участвующая в рассматриваемых ограничениях анализируемой задачи (4) условной оптимизации, имеет вид

$$(\mathbf{\Delta y} - \boldsymbol{c}^*)^T \cdot \Sigma \cdot (\mathbf{\Delta y} - \boldsymbol{c}^*) \leq r^2,$$

где обозначение $\boldsymbol{c}^* = Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})$ использовано для краткости.

Как следует из известных ограничений на возможные значения отношения Рэлея для положительно определенных квадратичных форм по типу рассматриваемой, справедливо неравенство [17]

$$\|\mathbf{\Delta y} - \boldsymbol{c}^*\|_2^2 \cdot \gamma_{\min} \leq (\mathbf{\Delta y} - \boldsymbol{c}^*)^T \cdot \Sigma \cdot (\mathbf{\Delta y} - \boldsymbol{c}^*) \leq \|\mathbf{\Delta y} - \boldsymbol{c}^*\|_2^2 \cdot \gamma_{\max},$$

где $\gamma_{\min}$ и $\gamma_{\max}$ являются соответственно минимальным и максимальным собственными числами ковариационной матрицы Σ. Получаем, что если $\|\mathbf{\Delta y} - \boldsymbol{c}^*\|_2^2 \le r^2/\gamma_{\max}$, то выполнено и неравенство $(\mathbf{\Delta y} - \boldsymbol{c}^*)^T \cdot (\mathbf{\Delta y} - \boldsymbol{c}^*) \le r^2$.

Таким образом, получаем, что приближением к решению задачи (4) является решение оптимизационной задачи

$$\min_{\substack{\mathbf{\Delta y}: A \cdot Q \cdot \mathbf{\Delta y} = A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}, \\ (\mathbf{\Delta y} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}))^T \cdot (\mathbf{\Delta y} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})) \le r^2/\gamma_{\max}}} \|\mathbf{\Delta y}\|_\Sigma^2,$$

эквивалентное решению такой модификации системы (7), которая уже оказывается полностью подобна по своей форме системе (5):

$$\begin{cases} 2 \cdot Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} + (A \cdot Q)^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0}(4)} + \\ +2 \cdot \lambda_{(4)} \cdot \Sigma \cdot \left(Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})\right) = \mathbf{0}_n, \\ (A \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x}) - \mathbf{b}^* = \mathbf{0}_m, \\ (Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}))^T \cdot \left(Q^{-1} \cdot \mathbf{\Delta x} - Q^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})\right) = r^2/\gamma_{\max}, \end{cases}$$

Как следует из представленных выше результатов, искомое решение определяется соотношением (8), в котором σ^2 следует заменить на $\gamma_{\max}$.

V. Обсуждение результатов

В работе представлено решение задачи согласования коррелированных результатов совместных измерений, допускающее прямой и непосредственный матричный расчет без необходимости численного решения оптимизационной задачи. Данное обстоятельство имеет важное практическое значение, поскольку освобождает пользователя от необходимости контроля сходимости, достижения в итерационном процессе требуемой точности приближений к решению и позволяет получить результат быстрее. В случае, если кооптируемая информация представляет собой предсказания, вырабатываемые цифровым двойником, то число обращений к нему и соответственно время вычислений радикально сокращаются, что повышает возможности использования соответствующих процедур. Полученные соотношения оптимизируют расчеты по времени (в смысле количества обращений к математической модели пользователя, сокращая их до одного – но, для некоторых из рассмотренных постановок, с условием возвращения не только значений математической модели, но и ее частных производных). Задача учета неопределенности исходных данных также оптимизируется, поскольку при выполненном аналитическом решении оказывается возможным получить оценки точности конечных результатов согласования, основываясь только на тех же самых значениях, возвращенных математической моделью (и значениях частных производных).

Заключение

В данном докладе впервые представлена замкнутая аналитическая модель согласования результатов измерений, учитывающая наличие корреляций между согласуемыми результатами измерений для случая, когда область возможных значений измеряемых величин ограничена эллипсом при кооптации информации в форме системы линейных алгебраических уравнений. Приведены соответствующие выражения для оценки получаемых уточненных оценок значений измеряемых величин, допускающие прямой расчет без привлечения итерационных процедур.

Список литературы

[1] M. Cochinwala, V. Kurien, G. Lalk, D. Shasha, “Efficient data reconciliation,” // Information Sciences, vol. 137(1-4), p. 1-15, 2001.

[2] A. Bakhtouchi, “Data reconciliation and fusion methods: A survey,” // Applied Computing and Informatics, vol. 18(3/4), p. 182-194, 2022.

[3] S. Narasimhan, C. Jordache, “Data Reconciliation and Gross Error Detection: An Intelligent Use of Process Data,” Gulf Professional Publishing, Houston, TX, USA, 1999.

[4] M.M. Câmara, R.M. Soares, T. Feital, T.K. Anzai, F.C. Diehl, P.H. Thompson, J.C. Pinto, “Numerical aspects of data reconciliation in industrial applications,” // Processes, vol. 5 (56), p. 1–38, 2017.

[5] Гаранин В.А., Семенов К.К. Непараметрические методы решения задачи согласования данных // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2024. Т. 540. С. 351-405.

[6] L.K. Reznik, G.N. Solopchenko, “Use of priori information on functional relations between measured quantities for improving accuracy of measurement,” // Measurement, vol. 3(3), p. 98-106, 1985.

[7] E.C. de Oliveira, F.R. Lourenço, “Data reconciliation applied to the conformity assessment of fuel products,” // Fuel, vol. 300, paper 120936, 2021.

[8] J. You, J. Wu, L. Xu, Y. Xie, J. Qiu, L. Wan, Q. Qin, “Exploration on the comprehensive data reconciliation framework for unknown parameter inference in the nuclear power plant system,” // Applied Thermal Engineering, vol. 247, paper 123138, 2024.

[9] V.A. Garanin, K.K. Semenov, “Increasing measurement accuracy by nonparametric data reconciliation,” // Measurement, vol. 238, paper 115235, 2024.

[10] V.A. Garanin, K.K. Semenov, “Semi-nonparametric approach for measured data reconciliation based on the Gram-Charlier series expansion,” // Measurement: Sensors, vol. 18, paper 100351, 2021.

[11] P.J. Verheijen, “Data reconciliation and error detection,” in The metabolic pathway engineering handbook, vol. 8, paragraph 13, 2010.

[12] D. Maquin, G. Bloch, J. Ragot, “Data reconciliation for measurements,” Revue Européenne Diagnostic et Sûreté de Fonctionnement, vol. 1(2), p. 145-181, 1991.

[13] D. Maquin, O. Adrot, J. Ragot, “Data reconciliation with uncertain models,” ISA transactions, vol. 39(1), p. 35-45, 2000.

[14] W. Zhu, Z. Zhang, Y. Liu, “Dynamic data reconciliation for improving the prediction performance of the data-driven model on distributed product outputs,” // Industrial & Engineering Chemistry Research, vol. 61(51), p. 18780-18794, 2022.

[15] Ефремов А.А., Козлов В.Н. Метод синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов // Информационно-управляющие системы. 2023. № 4. С. 47-55.

[16] A.A. Efremov, “Projection operator for solving generalized problems of program motions stabilization,” // Computing, Telecommunication and Control, vol. 16(4), p. 49-59, 2023.

[17] R.C. Li, “Rayleigh quotient based optimization methods for eigenvalue problems,” in Matrix Functions and Matrix Equations, p. 76-108, 2015.