

# Управление перевернутым маятником на подвижной тележке с гарантией нахождения регулируемой переменной в заданном множестве

И. Р. Гогорев

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

ilmirgogorev@yandex.ru

П. В. Соколов

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

pvsookolov@etu.ru

**Аннотация.** В работе представлен алгоритм управления механическими системами с гарантией нахождения регулируемой переменной в заданном множестве, ограниченном двумя функциями времени, что позволяет обеспечить не только устойчивость, но и качества переходного процесса. В качестве системы для тестирования метода используется модель тележки с перевернутым маятником, как довольно простая и в тоже время распространенная система для исследования методов управления. Данная система обладает характеристиками, которые представляют интерес для исследования их влияния на работу алгоритма управления: нелинейность, неустойчивость желаемого положения системы, неполноприводность.

**Ключевые слова:** Перевернутый маятник на подвижной тележке; гарантирующее управление; заданное множество

## 1. МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА

В качестве объекта управления рассматривается классическая электромеханическая система «тележка–перевернутый маятник». Данная система является удобным полигоном для апробации алгоритмов управления, поскольку она сочетает в себе несколько характерных для многих практических приложений свойств: нелинейность динамики, неустойчивость целевого положения равновесия и неполноприводность (число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы). Эти особенности делают задачу синтеза управления, одновременно обеспечивающего устойчивость и соблюдение ограничений на фазовые переменные, нетривиальной.

Модель тележки с обратным маятником описывается уравнениями Лагранжа-Эйлера второго рода [1], имеющими в векторно-матричной форме следующий вид:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Q \quad (1)$$

где  $q = [x, \theta]^T$  — вектор обобщенных координат (положение тележки и угол отклонения маятника от вертикали),  $M(q)$  — симметричная положительно-определенная матрица инерции,  $C(q, \dot{q})$  — матрица кориолисовых и центробежных сил,  $G(q)$  — вектор потенциальных (гравитационных) сил, - равные:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M + m & ml\cos(\theta) \\ ml\cos(\theta) & J + ml^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{\theta}\sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl\sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (4)$$

где  $m$  — масса маятника (кг),  $M$  — масса тележки (кг),  $l$  — расстояние от оси шарнира до центра масс маятника (м),  $J$  — момент инерции маятника относительно центра масс (кг·м<sup>2</sup>),  $g$  — ускорение свободного падения (м/с<sup>2</sup>). Слагаемое  $ml\dot{\theta}\sin(\theta)$  в матрице  $C$  описывает центробежный эффект, возникающий при вращении маятника, а компонента  $mgl\sin(\theta)$  в векторе  $G$  характеризует момент силы тяжести, стремящийся вывести маятник из верхнего неустойчивого положения.

$Q = [F, 0]^T$  — вектор обобщенных сил, в котором  $F$  представляет собой горизонтальную силу, приложенную к тележке и являющуюся единственным управляющим воздействием.

В скалярном виде уравнения (1)-(4):

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = F \\ (ml\cos(\theta))\ddot{x} + (J + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Система является нелинейной в силу наличия нелинейных функций от переменных состояния, неустойчивой в верхнем положении и неполноприводной, что является источником основных трудностей при управлении, но при этом многосвязной из-за наличия перекрестных членов, что позволяет управлением по одной координате влиять на динамику другой координаты.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Цель управления: стабилизировать маятник в положении  $\theta = 0$  при выполнении жестких ограничений на угол в любой момент времени:  $g^-(t) < \theta(t) < g_+(t), \forall t \geq 0$ , где  $g^-(t)$  и  $g_+(t)$  — заданные функции времени. Для обеспечения плавного, без перерегулирования, перехода от начального состояния в заданную окрестность нуля, функции границ выбираются в виде экспоненциально затухающих кривых:

$$\begin{aligned} g^-(t) &= (\theta_0 + \Delta)e^{-\alpha t} + \delta \\ g_+(t) &= (\theta_0 - \Delta)e^{-\alpha t} - \delta \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\theta_0 = \theta(0)$  — начальное значение угла,  $\Delta > 0$  — начальная полуширина “коридора” допустимых состояний системы,  $\alpha > 0$  — экспоненциального сужения коридора к установившемуся значению,  $\delta > 0$  — характеризует установившуюся точность стабилизации, то есть ширину трубки в окрестности нуля, в которой будет находиться угол после завершения переходного процесса. Такой выбор границ позволяет одновременно задать и желаемое качество переходного процесса (время регулирования, отсутствие перерегулирования), и требования к точности в установившемся режиме.

## III. СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

Центральной идеей синтеза является метод, предложенный в работах [2–3]. Он позволяет свести исходную задачу управления с жесткими ограничениями на выходную переменную к задаче стабилизации некоторой вспомогательной неограниченной переменной. Метод основан на введении обратимого преобразования координат  $\Phi$ , которое взаимно-однозначно отображает неограниченную переменную  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}$  в область, заданную ограничениями выхода (5). Преобразование  $\Phi$  строится таким образом, что:

- Когда  $\varepsilon$  изменяется в пределах  $(-\infty, +\infty)$ , выход изменяется строго внутри интервала  $(\underline{g}(t), \overline{g}(t))$ ;
- Преобразование обратимо и дифференцируемо.

В данной работе используется преобразование на основе гиперболического тангенса, обладающее необходимыми свойствами гладкости и монотонности:

$$\theta(t) = \Phi(\varepsilon(t), t) = A(t) \tanh(\varepsilon(t)) + B(t) \quad (7)$$

где функции  $A(t)$  и  $B(t)$  выражаются через заданные границы коридора и имеют ясный геометрический смысл:

$$A(t) = \frac{g^-(t) - g_+(t)}{2}, B(t) = \frac{g^-(t) + g_+(t)}{2} \quad (8)$$

Здесь  $A(t)$  — мгновенная полуширина допустимого интервала, а  $B(t)$  — мгновенный центр этого интервала.

Свойства выбранного преобразования:

1. Ограниченность:  $g^-(t) < \Phi(\varepsilon, t) < g_+(t)$  для всех  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ;

2. Асимптотическое поведение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \Phi(\varepsilon, t) = \overline{g}(t), \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} \Phi(\varepsilon, t) = \underline{g}(t) \quad (9)$$

3. Положительная производная:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = A(t) (1 - \tanh^2(\varepsilon)) > 0, A(t) > 0 \quad (10)$$

4. Существует явное обратное преобразование:

$$\varepsilon(t) = \operatorname{arctanh} \left( \frac{2\theta(t) - (g^-(t) + g_+(t))}{g^-(t) - g_+(t)} \right) \quad (11)$$

Для синтеза закона управления необходимо переписать исходные уравнения динамики (5) в терминах новой переменной. Для этого из (6) найдем:

$$\dot{\theta} = \Phi_\varepsilon \dot{\varepsilon} + \Phi_t \quad (12)$$

$$\ddot{\theta} = \Phi_{\varepsilon\varepsilon} \dot{\varepsilon}^2 + 2\Phi_{\varepsilon t} \dot{\varepsilon} + \Phi_{tt} \quad (13)$$

где:

$$\Phi_\varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = A(t) \operatorname{sech}^2(\varepsilon),$$

$$\Phi_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \dot{A}(t) \tanh(\varepsilon) + \dot{B}(t),$$

$$\Phi_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} = -2A(t) \tanh(\varepsilon) (1 - \tanh^2(\varepsilon)), \quad (14)$$

$$\Phi_{\varepsilon t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon \partial t} = \dot{A}(t) (1 - \tanh^2(\varepsilon)),$$

$$\Phi_{tt} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \ddot{A} \tanh(\varepsilon) + \ddot{B}(t)$$

Подставляя (12) и (13) с учетом (14) в исходные уравнения (5), после группировки слагаемых получаем систему уравнений относительно старших производных получим систему вида:

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{x} + a_{12} \ddot{\varepsilon} = F - (b_{12} \dot{\varepsilon}^2 + c_1 \dot{\varepsilon} + d_1) \\ a_{21} \ddot{x} + a_{22} \ddot{\varepsilon} = -b_{22} \dot{\varepsilon}^2 + c_2 \dot{\varepsilon} + d_2 \end{cases} \quad (15)$$

Так как  $a_{21} = ml \cos(\theta) \neq 0$  при  $\theta \neq \pm \pi / 2$ , для него всегда существует обратный элемент. Тогда из второго уравнения можно выразить  $\ddot{\varepsilon}$ :

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{a_{22}}{a_{21}} \ddot{\varepsilon} - \frac{b_{22}}{a_{21}} \dot{\varepsilon}^2 + \frac{c_2}{a_{21}} \dot{\varepsilon} + \frac{d_2}{a_{21}} \quad (16)$$

Подставляя данное выражение в первое уравнение (15), получим уравнения относительно преобразованной переменной  $\varepsilon$  и её старших производных.

$$\begin{aligned}
a_{11} &= M + m, a_{12} = ml \cos(\theta) \Phi_\varepsilon, \\
a_{21} &= ml \cos(\theta), a_{22} = (J + ml^2) \Phi_\varepsilon \\
b_{12} &= ml \cos(\theta) \Phi_{\varepsilon\varepsilon} - ml \sin(\theta) \Phi_\varepsilon^2 \\
b_{22} &= (J + ml^2) \Phi_{\varepsilon\varepsilon} \\
c_1 &= 2ml \cos(\theta) \Phi_{\varepsilon t} - 2ml \sin(\theta) \Phi_\varepsilon \Phi_t \\
c_2 &= 2(J + ml^2) \Phi_{\varepsilon t} \\
d_1 &= ml \cos(\theta) \Phi_{tt} - ml \sin(\theta) \Phi_t^2 \\
d_2 &= (J + ml^2) \Phi_{tt} - mgl \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{17}$$

Эквивалентную модель в новых координатах:

$$\Pi_1(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, t) \ddot{\varepsilon} = F - \Pi_2(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, t) \tag{18}$$

где:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= -\frac{\Phi_\varepsilon \left[ (M + m)(J + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 \theta \right]}{ml \cos \theta} \\
\Pi_2 &= \frac{a_{11} b_{22} - a_{21} b_{12}}{a_{21}} \dot{\varepsilon}^2 + \frac{a_{11} c_2 - a_{21} c_1}{a_{21}} \dot{\varepsilon} + \frac{a_{11} d_2 - a_{21} d_1}{a_{21}}
\end{aligned} \tag{19}$$

Знаменатель  $\Pi_1$  содержит  $\cos(\theta)$ , что объясняет ограничения  $\theta \neq \pm\pi/2$ , то есть маятник не должен находится в горизонтальном положении, что физически ожидаемо для задачи стабилизации в верхнем положении. Выражение в квадратных скобках представляет собой определитель матрицы инерции  $M(q)$ , которая для механических систем всегда строго положительная. Учитывая, что знаменатель  $\Pi_1$  всегда больше нуля в заданных ограничениях, определитель матрицы инерции всегда больше нуля в силу положительности матрицы и то, что  $\Phi_\varepsilon > 0$  по построению преобразования, заключим что  $\Pi_1 > 0$  для всех допустимых состояний.

Зададим желаемую динамику для  $\varepsilon$  – линейную асимптотически устойчивую систему:

$$\ddot{\varepsilon}_d + k_d \dot{\varepsilon} + k_p \varepsilon = 0, k_p, k_d > 0 \tag{20}$$

Потребуем, чтобы реальное ускорение совпадало с желаемым:

$$\ddot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon}_d = -k_d \dot{\varepsilon} - k_p \varepsilon \tag{21}$$

Подставляя (21) в (17), получаем явное выражение для управляющей силы:

$$F = \Pi_1(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, t) (-k_d \dot{\varepsilon} - k_p \varepsilon) + \Pi_2(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, t) \tag{22}$$

#### IV. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ АЛГОРИТМА

Для проверки работоспособности и оценки эффективности предложенного алгоритма было проведено численное моделирование в среде MATLAB. Моделирование проводилось при следующих параметрах:  $m = 0.2$  кг,  $M = 1$  кг,  $l = 0.5$  м,  $J = ml^2$ ,  $\theta_0 = 0.3$  рад,  $\Delta = 0.1$  рад,  $\alpha = 0.5$ ,  $\delta = 0.01$  рад,  $k_p = 10$ ,  $k_d = 5$ .

Результаты подтверждают (рис. 1–2), что траектория угла  $\theta(t)$  на всём протяжении переходного процесса остается строго внутри заданного коридора.

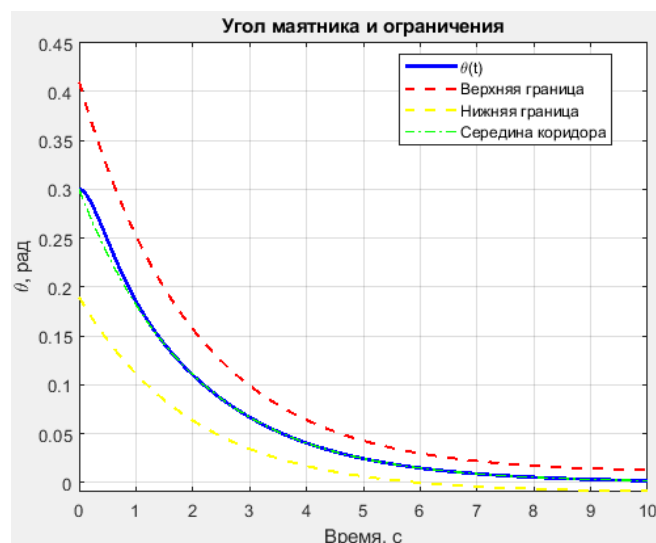


Рис. 1. Изменение угла маятника при стандартном алгоритме с номинальными параметрами

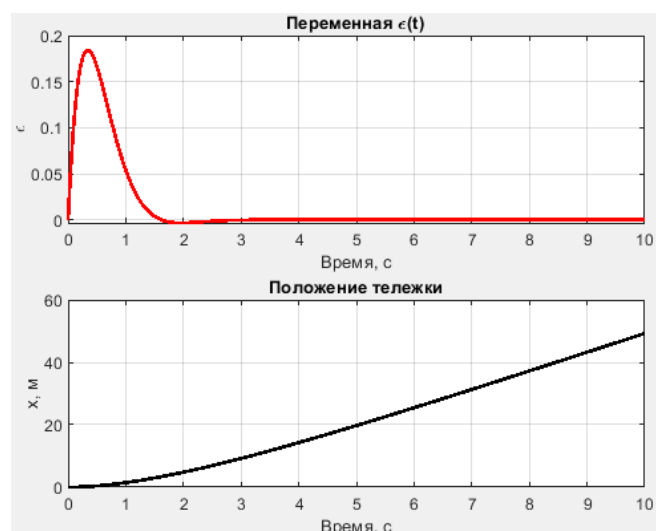


Рис. 2. Изменение положения тележки и переменной преобразования при стандартном алгоритме с номинальными параметрами

Рис. 2 показывает изменение положения тележки  $x(t)$  и вспомогательной переменной  $\varepsilon(t)$ . Переменная  $\varepsilon(t)$  демонстрирует поведение, полностью соответствующее предписанной линейной динамике (20): процесс носит плавный аperiodический характер, плавно стремится к нулю.

Для исследования грубости (робастности) алгоритма к параметрическим возмущениям было проведено моделирование, в котором все физические параметры системы были одновременно изменены на +20% относительно номинальных значений, в то время как регулятор оставался рассчитанным на номинальные параметры. Результат для угла  $\theta(t)$  показан на рис. 3.

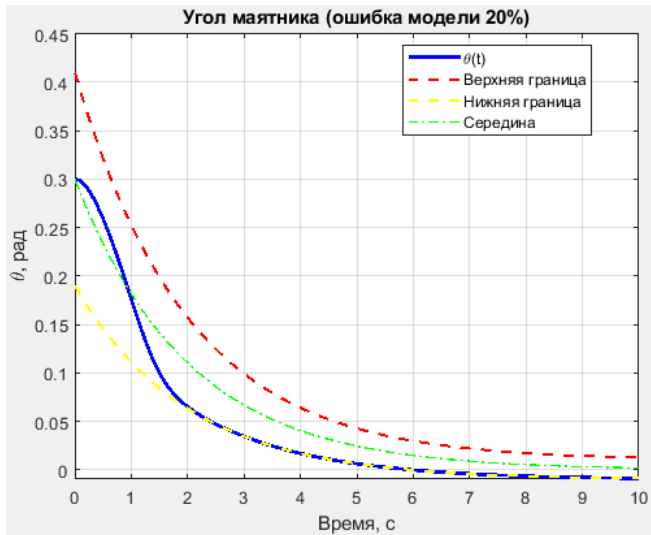


Рис. 3. Изменение угла маятника при стандартном алгоритме с измененными параметрами

Как видно, гарантированное нахождение угла в заданных границах сохранилось, что подтверждает надежность базового принципа метода. Однако угол “упёрся” в одну из границ, что свидетельствует об отклонении реальной динамики  $\varepsilon(t)$  от желаемой в силу несоответствия параметров. Этот результат указывает на необходимость модификации алгоритма, например, путем введения робастной составляющей в закон управления, что является предметом дальнейших исследований.

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен и исследован алгоритм управления механическими системами, гарантирующий нахождение регулируемой переменной в заданном множестве, ограниченном двумя функциями времени. В качестве объекта для апробации выбрана классическая нелинейная и неустойчивая система «тележка–перевернутый маятник». Результаты моделирования полностью подтвердили теоретические положения: угол отклонения маятника на всем интервале движения остается строго внутри заданного коридора, а переходный процесс обладает желаемым качеством. Дополнительно продемонстрировано, что метод сохраняет свою эффективность при значительном (20%) отклонении параметров объекта от номинальных, хотя качество переходного процесса ухудшается. Дальнейшие исследования будут направлены на повышение робастности алгоритма.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 825 с.
- [2] Фуртат И.Б., Гушин П.А. Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // Автоматика и телемеханика. 2021. № 4.
- [3] Фуртат И.Б., Гушин П.А. Методы анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления при наличии возмущений и запаздывания. — Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2021.