

Быстрое преобразование Фурье в нейросетевом представлении

А. Ю. Дорогов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

vaksa2006@yandex.ru

Аннотация. В работе предложена новая схема построения алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), основанная на стратификации модели БПФ на топологическую и параметрическую составляющие. Топология определяет граф алгоритма, её выбор инвариантен к виду преобразования и выполняется независимо, следуя правилами проектирования структуры самоподобных нейронных сетей. Выбор параметров базовых операций подчинён топологической модели, и не требует использования итерационных процедур связанных с последовательным разложением дискретных функций Фурье. В результате сложность проектирования алгоритма БПФ не зависит от значения и композиционного представления размерности преобразования. Более того, можно подобрать топологию алгоритма, которая обеспечивает естественную упорядоченность выходных спектральных коэффициентов алгоритма БПФ по частотам следования. В работе приведены примеры построения топологии и БПФ для композиционной размерности.

Ключевые слова: быстрое преобразование Фурье, топологическая модель, самоподобная нейронная сеть, параметрическая настройка

I. ВВЕДЕНИЕ

Спектральный анализ сигналов, основанный на методах дискретного преобразования Фурье (ДПФ), широко применяется для обработки сигналов в различных областях знаний и технических приложениях. Мощный импульс развития это направление получило после публикации в 1965 году статьи Кули и Тьюки по быстрому преобразованию Фурье (БПФ) [1]. Отчасти этому способствовало бурное развитие вычислительной техники в то время. Следует отметить, что быстрое преобразование Фурье имеет давнюю историю [2]. Первые работы по БПФ связаны с именем Гаусса [3], относятся к 1805 году (но опубликованы только в 1866 году). Далее в 19-ом и 20-м веке метод БПФ неоднократно переоткрывался с различными модификациями. В частности, статье Кули и Тьюки непосредственно предшествовала замечательная работа Гуда по алгоритму БПФ [4], (1958г.) которая в то время прошла не замеченной.

Алгоритм БПФ основан на рекуррентной мультипликативной декомпозиции комплексной экспоненты, позволяющей свести вычисление преобразования ДПФ большой композиционной размерности к малым размерностям ДПФ, вплоть до размерности равной двум и за счёт этого кардинально уменьшить число вычислительных операций. Алгоритм Кули–Тьюки был разработан для преобразований размерности $N = 2^n$, которые рекуррентно за n шагов

трансформировались в последовательно-параллельную совокупность ДПФ преобразований размерности 2. Этот процесс эквивалентен разложению (факторизации) матрицы ДПФ размерности N в произведение из n слабо заполненных блочных матриц, где блоками являются ДПФ размерности 2, называемых базовыми операциями. Графический образ такой базовой операции напоминает «бабочку», этот термин прижился для алгоритмов данного класса. Схема построения алгоритма БПФ для размерности $N = 2^n$ была проста, наглядна и получила большое распространение. Однако, такая размерность часто не удобна в практических приложениях.

Алгоритм БПФ можно построить и когда размерность преобразования представляет собой некоторую мультипликативную композицию произвольных целых чисел $N = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$, но использование схемы Кули–Тьюки в этом случае становится очень громоздким. Тем не менее, алгоритмические трудности были преодолены, примером является широко-распространённый программный пакет FFTW [5].

Второй особенностью БПФ алгоритмов Кули–Тьюки является необходимость двоично-инверсного переупорядочивания спектральных коэффициентов, для того чтобы привести их последовательность к естественному порядку по возрастанию частоты. Для БПФ размерности $N = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$ принцип переупорядочения существенно усложняется.

Все известные к настоящему времени схемы построения алгоритмов БПФ имеют отправной точкой базовые функции ДПФ. В результате рекуррентного процесса факторизации системы базовых функций, определяется топологический граф алгоритма БПФ, и одновременно находятся параметры базовых операций. В настоящей работе предлагается разделить эти два процесса. Стратификация процедуры даёт преимущества независимого проектирования топологической модели алгоритма и параметрической настройки базовых операций. Этот принцип существенно упрощает способ построения БПФ и открывает возможности его использования для других видов спектральных преобразований. Процедура становится подобной настройке нейронной сети с заданной структурой к выбранной системе базовых функций. Первым шагом в этой процедуре является выбор топологической модели преобразования. Модель должна соответствовать внутренней структуре быстрого алгоритма. Характерным свойством рекуррентных процессов является самоподобие. Методы построения самоподобных

многослойных нейросетевых структур были рассмотрены автором в работах [6, 7, 8]. С позиций нейросетевой технологии базовые операции быстрого алгоритма уместно назвать нейронными ядрами.

II. НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ БЫСТРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

На рис. 1 показан пример графа топологической модели самоподобной сети при композиционной размерности: $N = p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

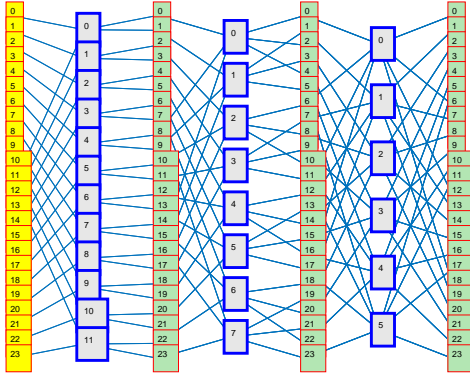


Рис. 1. Граф топологической модели для БПФ с естественным порядком следования спектральных коэффициентов, вариант 1

Выделенные прямоугольники представляют собой базовые операции (нейронные ядра). С точки зрения нейротехнологии, граф представляет собой трёхслойную нейронную сеть с прореженным множеством межслойных связей.

Выбор модели можно подчинить определённым требованиям, например, обеспечить естественный порядок спектральных коэффициентов по частотам следования. На рис. 1 показан граф топологической модели, обладающий подобным свойством. Топологическая модель имеет аналитическое представление, которое можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} U^m &= \langle u_m u_{m+1} \dots u_{n-2} u_{n-1} v_{m-1} v_{m-2} \dots v_1 v_0 \rangle, \\ V^m &= \langle u_{m+1} u_{m+2} \dots u_{n-1} v_m v_{m-1} v_{m-2} \dots v_1 v_0 \rangle, \\ z^m &= \langle u_{m+1} \dots u_{n-2} u_{n-1} v_{m-1} v_{m-2} \dots v_1 v_0 \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь индекс $m = 0, 1, \dots, n-1$ – означает номер нейронного слоя (для быстрых преобразований, отсчёт индексов и дискретных переменных принято вести с нуля), $U^m = 0 \dots (N-1)$ – номер рецептора для слоя m , $V^m = 0 \dots (N-1)$ – номер аксона для слоя m , z^m – номер нейронного ядра для слоя m , $u_m = 0 \dots (1-p_m)$ – локальный номер рецептора для ядер слоя m , $v_m = 0 \dots (1-p_m)$ – локальный номер аксона для ядер слоя m . Числа p_i являются множителями в мультипликативной композиции $N = p_0 p_1 \dots p_{n-1}$. Угловые скобки выделяют кортеж, представляющий число в многоосновной системе счисления. Старшим считается крайний разряд слева, младшим – крайний разряд справа. Аналитическое описание топологической модели достаточно для построения графа алгоритма быстрого преобразования [6]. Графу алгоритма можно

сопоставить факторизованное представление матричного преобразования ДПФ, которое имеет вид:

$$H = H_0 H_1 \dots H_{n-1},$$

где каждой слабозаполненной матрице H_i соответствует один слой графа топологической модели. В работе [7] показано, что для самоподобных сетей элементы матрицы преобразования $H = \|h(U, V)\|$ могут быть выражены в виде произведений элементов матриц базовых операций:

$$h(U, V) = w_{z^{n-1}}^{n-1}(u_{n-1}, v_{n-1}) w_{z^{n-2}}^{n-2}(u_{n-2}, v_{n-2}) \dots w_{z^0}^0(u_0, v_0). \quad (3)$$

Для преобразования Фурье этот результат был получен Гудом в работе [4].

III. НАСТРОЙКА БЫСТРОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА БАЗИС ФУРЬЕ

По определению, функции дискретного базиса Фурье задаются выражением:

$$F_N(U, V) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} UV\right). \quad (4)$$

где U – временной отсчёт; V – частота (или номер) базисной функции; $j = \sqrt{-1}$, $N = p_0 p_1 \dots p_{k-1}$ – размерность преобразования (для быстрых преобразований размерность всегда является составным числом). В данном определении предполагается, что преобразование ДПФ выполняется как умножение вектора-строки слева на матрицу F_N , что соответствует направленности графа БПФ по выполняемым операциям слева на право.

Далее в статье будут рассмотрены несколько вариантов топологических моделей для построения алгоритмов БПФ с естественным упорядочением спектральных коэффициентов по частотам следования.

Вариант 1. Для построения алгоритма воспользуемся топологической моделью (1). Полагая $m=0$ для входного слоя, будем иметь:

$$U = U^0 = \langle u_0 u_1 \dots u_{n-2} u_{n-1} \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} u_m p_{m+1} p_{m+2} \dots p_{n-1}.$$

Подставив последнее выражение в (4), и учитывая, что $N = p_0 p_1 \dots p_{n-1}$ получим:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp\left(-j \frac{2\pi V}{p_0 p_1 \dots p_m} u_m\right). \quad (5)$$

Для выходного слоя $m = n-1$ из выражения (1) следует:

$$V = V^{n-1} = \langle v_{n-1} v_{n-2} v_{n-3} \dots v_1 v_0 \rangle.$$

Для любого промежуточного разряда с номером m , последнее выражение можно записать в виде:

$$V = \langle v_{n-1} v_{n-2} v_{n-3} \dots v_1 v_0 \rangle = \langle v_{n-1} v_{n-2} \dots v_{m+1} \rangle p_m p_{m-1} \dots p_0 + \dots + v_m p_{m-1} p_{m-2} \dots p_0 + \langle v_{m-1} v_{m-2} \dots v_0 \rangle.$$

Подставляя это выражение в (5) и учитывая периодичность комплексной экспоненты по периоду 2π , после преобразований, получим:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp \left(-j2\pi \left[\frac{u_m v_m}{p_m} + u_m \frac{\langle v_{m-1} v_{m-2} \dots v_0 \rangle}{p_0 p_1 \dots p_m} \right] \right).$$

Каждый сомножитель в этом произведении соответствует элементу базовой операции в мультипликативном представлении (3). Таким образом, получено, что базовые операции алгоритма БПФ определяются выражением:

$$w_{z^m}^m(u_m, v_m) = \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp \left(-j \frac{2\pi}{p_m} u_m v_m \right) \exp \left(-j2\pi u_m \frac{\langle v_{m-1} v_{m-2} \dots v_0 \rangle}{p_0 p_1 \dots p_m} \right).$$

Кроме разрядных переменных $v_{m-1}, v_{m-2}, \dots, v_0$ в выражении (1) для номера ядра z^m содержатся переменные $u_{m+1}, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}$, это означает, что базовые операции в пределах слоя будут повторяться.

Следуя выражению (3), по элементам базовых операций, можно восстановить матрицу H дискретного преобразования Фурье. На рис. 2 и рис. 3 показаны функции, отвечающие столбцам восстановленной матрицы ДПФ для быстрого алгоритма показанного на рис. 1.

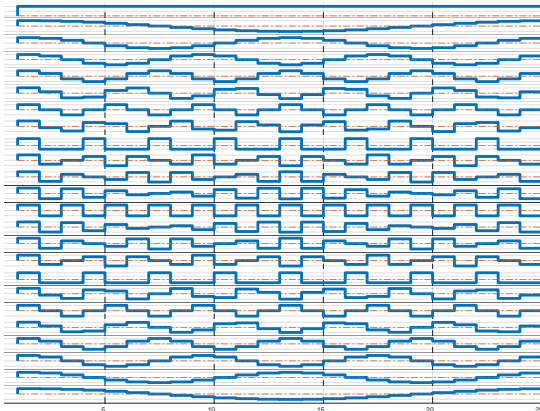


Рис. 2. Вещественная составляющая базиса Фурье

Нетрудно заметить, что функции построенного преобразования упорядочены по возрастанию частот.

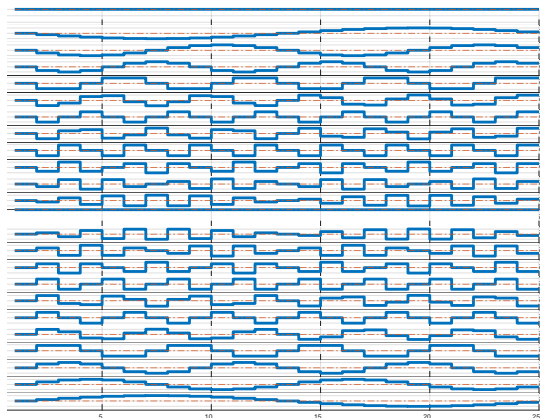


Рис. 3. Мнимая составляющая базиса Фурье

Вариант 2. Если иначе представить переменные U и V , модели, то можно, получить другое выражение для

вычисления элементов нейронных ядер. Для выходного слоя из (1) следует:

$$V = V^{n-1} = \langle v_{n-1} v_{n-2} v_{n-3} \dots v_1 v_0 \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} v_m p_{m-1} p_{m-2} \dots p_0.$$

Подставляя это представление в (4) получим:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp \left(-j \frac{2\pi U}{p_m p_{m+1} \dots p_{n-1}} v_m \right). \quad (6)$$

Для любого m можно записать:

$$U = U^0 = \langle u_0 u_1 \dots u_{n-2} u_{n-1} \rangle = \langle u_0 u_1 \dots u_{m-1} \rangle p_m p_{m+1} \dots p_{n-1} + \dots + u_m p_{m+1} \dots p_{n-1} + \langle u_{m+1} u_{m+2} \dots u_{n-1} \rangle.$$

Подставляя последнее в (6) и учитывая периодичность комплексной экспоненты по периоду 2π после преобразований получим:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp \left(-j2\pi \left[\frac{u_m v_m}{p_m} + v_m \frac{\langle u_{m+1} u_{m+2} \dots u_{n-1} \rangle}{p_m p_{m+1} \dots p_{n-1}} \right] \right).$$

Каждый сомножитель в этом произведении соответствует элементу базовой операции в мультипликативном представлении (3). Таким образом, базовые операции алгоритма БПФ определяются выражением:

$$w_{z^m}^m(u_m, v_m) = \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp \left(-j \frac{2\pi}{p_m} u_m v_m \right) \exp \left(-j2\pi v_m \frac{\langle u_{m+1} u_{m+2} \dots u_{n-1} \rangle}{p_m p_{m+1} \dots p_{n-1}} \right).$$

Базовые операции для двух представленных вариантов не совпадают между собой, но соответствуют одной и той же топологической модели. В обоих случаях реализуется БПФ с естественным упорядочением по частотам следования.

IV. МАТРИЧНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БПФ

Для примера, показанного на рис. 1, развёрнутая форма топологической модели (1) будет иметь вид таблицы:

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
U^m	$\langle u_0 u_1 u_2 \rangle$	$\langle u_1 u_2 v_0 \rangle$	$\langle u_2 v_1 v_0 \rangle$
V^m	$\langle u_1 u_2 v_0 \rangle$	$\langle u_2 v_1 v_0 \rangle$	$\langle v_2 v_1 v_0 \rangle$
z^m	$\langle u_1 u_2 \rangle$	$\langle u_2 v_0 \rangle$	$\langle v_1 v_0 \rangle$

Каждая клетка таблицы представляет собой слово, составленное из индексированных букв u и v . Назовём эти слова топологическими, а таблицу – топологической. Слова в строке U^m таблицы послоyno определяют топологии рецепторных полей, в строке V^m – топологии аксоновых полей, а в строке помеченной z^m – топологическую форму номера ядра. Буквы слова именуют разрядные переменные, а угловые скобки акцентируют, что слово является поразрядным представлением числа.

Для числовой интерпретации топологических слов необходимо задать основания разрядных переменных. Для рассматриваемого примера имеем: $P = [p_0 p_1 p_2] = [2 3 4]$. Числовые интерпретации определяется правилом вычисления значения числа, в

многоосновной системе счисления, например для рецепторных полей примера получим:

$$\begin{aligned} U^0 &= \langle u_0 u_1 u_2 \rangle = u_0 p_1 p_2 + u_1 p_2 + u_2, \\ U^1 &= \langle u_1 u_2 v_0 \rangle = u_1 p_2 p_0 + u_2 p_0 + v_0, \\ U^2 &= \langle u_2 v_1 v_0 \rangle = u_2 p_1 p_0 + v_1 p_0 + v_0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для данной топологии выполнено условие $U^{m+1} = V^m$. Такие топологии называются компактными и имеют наиболее простую программную реализацию. При построении графа топологической модели, рецептор и аксон смежных слоёв связываются дугой, если значения всех одноименных разрядов в поразрядных представлениях их номеров попарно совпадают. По этому правилу построен граф, показанный на рис. 1. Указанное правило является следствием самоподобной структуры сети [6, 9].

Любой слой графа можно представить в виде матрицы смежности, которую будем называть *топологической матрицей*. Топологические матрицы определяют шаблоны матриц-сомножителей в факторизованном представлении быстрого алгоритма: $H = H_0 H_1 \dots H_{n-1}$. Топология преобразования может быть представлена логическим произведением топологических матриц $T_0 T_1 \dots T_{n-1}$, состоящим из нулей и единиц. Единицам матриц соответствуют ненулевые элементы базовых операций. На рис. 4 показаны топологические матрицы для рассматриваемого примера, здесь точками выделены ненулевые элементы. Например, для нулевого слоя ($m = 0$) графа показанного на рис. 1 вертикальные блоки с единичными значениями соответствуют ненулевым элементам базовых операций размерности 2×2 . Все остальные элементы матрицы равны нулю.

Значения nz , показанные на рис. 4, равны числу ненулевых элементов в матрице, эти же значения определяют число операций умножения, требуемых для выполнения преобразования вектора в слое.

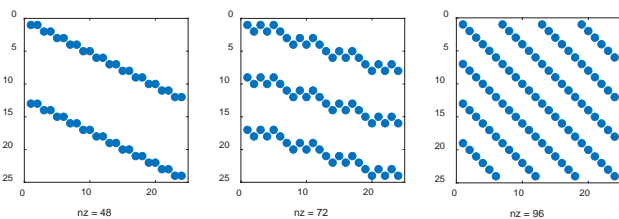


Рис. 4. Топологические матрицы БПФ алгоритма

Используя эти величины, можно дать численную оценку вычислительной эффективности быстрого преобразования по сравнению с прямым преобразованием Фурье:

$$g = \frac{24^2}{48 + 72 + 96} = 2.66.$$

В рассмотренных моделях для нумерации строк и столбцов матрицы быстрого преобразования использовались кортежи, составленные из разрядных переменных u и v , которые в дальнейшем будем называть внутренними разрядными переменными.

Поскольку размещение разрядов в этих кортежах зависит от вида топологии и номера слоя, то такая форма неудобна для использования в матрицах T_i и H_i . Введём новые переменные, которые назовём разрядными переменными внешнего представления. Отличительная особенность их использования состоит в неизменном порядке размещения в кортежах всех слоёв. Между внутренними и внешними разрядными переменными в каждом слое устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Выбранный порядок следования разрядов в кортежах внешнего представления будем в дальнейшем называть терминальным соглашением, например:

$$U^m = U = \langle U_{n-1} U_{n-2} \dots U_0 \rangle, \quad V^m = V = \langle V_{n-1} V_{n-2} \dots V_0 \rangle.$$

Терминальные соглашения, по существу, определяют привязку внутреннего образа топологии к внешнему представлению. В следующей таблице приведены соответствия между внутренними и внешними разрядными переменными для топологической модели (1). Делая замену переменных согласно приведённой таблице можно получить внешнее представление для номеров ядер $z^m = \langle U_{n-2} U_{n-2} \dots U_{m+1} V_{m-1} V_{m-2} \dots V_0 \rangle$.

ТАБЛИЦА 1. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ВНУТРЕННИМИ И ВНЕШНИМИ РАЗРЯДНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

U^m	u_m	u_{m+1}	\dots	u_{n-2}	u_{n-1}	v_{m-1}	\dots	v_2	v_1	v_0
U^m	U_{n-1}	U_{n-2}	\dots	U_{m+1}	U_m	U_{m-1}	\dots	U_2	U_1	U_0
V^m	u_{m+1}	u_{m+2}	\dots	u_{n-1}	v_m	v_{m-1}	\dots	v_2	v_1	v_0
V^m	V_{n-1}	V_{n-2}	\dots	V_{m+1}	V_m	V_{m-1}	\dots	V_2	V_1	V_0

Таблицу соответствия можно также использовать для построения аналитического представления топологических матриц T_m . Следующие рассуждения приводят к этому результату. Матрица T_m состоит из нулей и единиц. Единицам соответствуют элементы ядер слоя, это означает, что для любого единичного элемента $T_m(U^m, V^m) = 1$ в поразрядных внутренних представлениях чисел U^m, V^m и z^m общие разрядные переменные u и v должны совпадать по значениям. Следуя данному правилу и используя первую и третью строки таблицы, можно получить аналитическую формулу для вычисления элементов топологической матрицы:

$$T_m(U^m, V^m) = \delta(U_{n-2}, V_{n-1}) \delta(U_{n-3}, V_{n-2}) \dots \delta(U_0, V_0),$$

где $\delta(\cdot)$ – функция Кронекера. Последовательность сомножителей в последнем выражении обрывается, если индекс m в таблице соответствия выходит за допустимые границы $[0, n-1]$. Например, для рассматриваемого примера (рис. 1) топологические матрицы слоёв будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned} T_0(U, V) &= \delta(U_1, V_2) \delta(U_0, V_1), \\ T_1(U, V) &= \delta(U_1, V_2) \delta(U_0, V_0), \\ T_2(U, V) &= \delta(U_1, V_1) \delta(U_0, V_0). \end{aligned}$$

Используя выражения для топологических матриц, таблицу соответствия и значения элементов ядер можно

получить аналитические выражения и для матриц факторизованного представления:

$$\begin{aligned} H_0(U, V) &= w_{z^0}(U_0, V_0) \delta(U_1, V_2) \delta(U_0, V_1), \\ H_1(U, V) &= w_{z^1}(U_1, V_1) \delta(U_1, V_2) \delta(U_0, V_0), \\ H_2(U, V) &= w_{z^2}(U_2, V_2) \delta(U_1, V_1) \delta(U_0, V_0). \end{aligned}$$

V. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СХЕМЫ КУЛИ–ТЬЮКИ

Эти схемы были предложены J. W. Cooley и J. W. Tukey [1] для реализации БПФ и получили названия «с прореживанием по времени» и «с прореживанием по частоте». Изначально данные схемы использовались для построения алгоритмов БПФ по основанию 2. Предложенные схемы алгоритмически описывали процедуру последовательной декомпозиции входного вектора на части.

В схеме «с прореживанием по времени» входная последовательность разделялась на чётные и нечётные отсчёты. Для базовой операции «бабочка» регулярным образом отбиралось по одному отсчёту из каждой порождённой последовательности и результирующие операнды помещались в те же ячейки памяти, из которых выбирались входные отсчёты.

На рис. 5 показан граф алгоритма БПФ, построенный по схеме «с прореживанием по времени» для размерности $N = 2^4$.

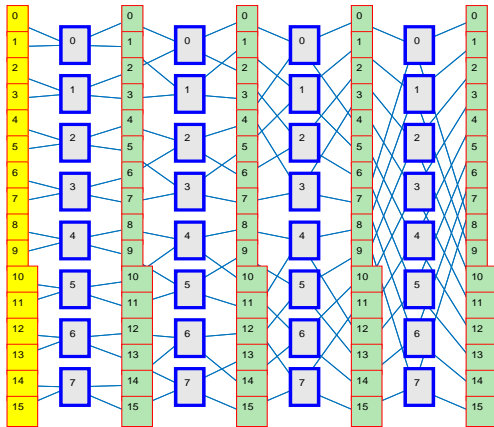


Рис. 5. Граф алгоритма БПФ в топологии Кули–Тьюки «с прореживанием по времени»

Данная схема реализует компактную топологию и аналитически может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} U^m &= \langle u_{n-1}u_{n-2} \dots u_{m+1}u_m v_{m-1}v_{m-2} \dots v_1 v_0 \rangle, \\ V^m &= \langle u_{n-1}u_{n-2} \dots u_{m+1}v_m v_{m-1}v_{m-2} \dots v_1 v_0 \rangle, \\ z^m &= \langle u_{n-1}u_{n-2} \dots u_{m+1}v_{m-1}v_{m-2} \dots v_1 v_0 \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Для нахождения базовых операций воспользуемся топологической моделью (1) и способом вычисления базовых операций в рассмотренном выше *Варианте 1*.

Для пояснения принципа расчёта временно введём для кортежей топологической модели (1) новые обозначения $\hat{U}^m, \hat{V}^m, \hat{z}^m$ с целью отличить их от текущей модели (7). Из сравнений моделей (1) и (7) следует, что

ядра с номерами $\hat{z}^m = \langle u_{m+1} \dots u_{n-2} u_{n-1} v_{m-1} v_{m-2} \dots v_1 v_0 \rangle$ модели (1) будут переходить в ядра с номерами $z^m = \langle u_{n-1} u_{n-2} \dots u_{m+1} v_{m-1} v_{m-2} \dots v_1 v_0 \rangle$ модели (7).

Сравнивая модели для входного терминального поля, будем иметь:

$$\hat{U} = \hat{U}^0 = \langle u_0 u_1 \dots u_{n-2} u_{n-1} \rangle \text{ и } U = U^0 = \langle u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 u_0 \rangle.$$

Это означает, что результирующая матрица F_N восстановленная по модели (7) будет переупорядочена по входной координате (по строкам) и для того чтобы получить спектр в естественном порядке по частотам следования, необходимо будет переупорядочивать координаты входного вектора для БПФ построенного по модели (7). Однако строки восстановленной матрицы будут содержать функции базиса Фурье, поэтому, если умножить полученную матрицу F_N справа на входной вектор-столбец, то получим корректный спектр, но с коэффициентами, переставленными в разрядно-инверсном порядке по частотам следования.

В схеме «с прореживанием по частоте» входная последовательность делилась на две подпоследовательности с номерами отсчётов: для первой подпоследовательности от 0 до $N/2-1$ и от $N/2$ до $N-1$ для второй. Для базовой операции «бабочка» регулярным образом отбиралось по одному отсчёту из каждой порождённой подпоследовательности и результаты операции помещались в те же ячейки памяти, из которых выбирались отсчёты. Такая же процедура повторялась на остальных шагах алгоритма. Данная схема реализует компактную топологию и аналитически может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} U^m &= \langle v_0 v_1 \dots v_{m-1} u_m u_{m+1} \dots u_{n-2} u_{n-1} \rangle, \\ V^m &= \langle v_0 v_1 \dots v_{m-1} v_m u_{m+1} \dots u_{n-2} u_{n-1} \rangle, \\ z^m &= \langle v_0 v_1 \dots v_{m-1} u_{m+1} \dots u_{n-2} u_{n-1} \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

На рис. 6 показан граф алгоритма БПФ, построенный по схеме «с прореживанием по частоте» для размерности $N = 2^4$.

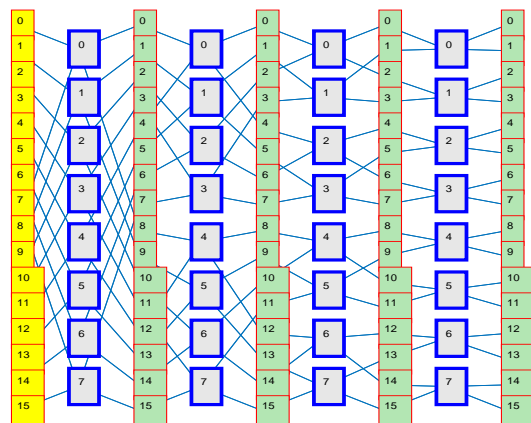


Рис. 6. Граф алгоритма БПФ в топологии Кули–Тьюки «с прореживанием по частоте»

Для нахождения базовых операций также воспользуемся топологической моделью (1) и способом вычисления базовых операций по *Варианту 1*. Из

сравнений моделей (1) и (8) следует, что ядра с номерами $\hat{z}^m = \langle u_{m+1} \cdots u_{n-2} u_{n-1} v_{m-1} v_{m-2} \cdots v_1 v_0 \rangle$ модели (1) будут переходить в ядра с номерами $z^m = \langle v_0 v_1 \cdots v_{m-1} u_{m+1} \cdots u_{n-2} u_{n-1} \rangle$. Сравнивая модели для выходного терминального поля, будем иметь:

$$\hat{V}^{n-1} = \langle v_{n-1} v_{n-2} v_{n-3} \cdots v_1 v_0 \rangle \quad \text{и} \quad V^{n-1} = \langle v_0 v_1 \cdots v_{n-2} v_{n-1} \rangle.$$

Это означает, что результирующая матрица F_N будет переупорядочена по выходной координате (по столбцам) и для того, чтобы получить спектр в естественном порядке по частотам следования, необходимо будет переупорядочивать координаты выходного вектора. Построенную матрицу F_N можно умножать справа на входной вектор-столбец с отсчётами, переставленными в инверсном порядке, в этом случае на выходе получим корректный спектр в естественном порядке по частотам следования. Алгоритму БПФ «правого умножения» также можно сопоставить некоторую топологическую модель. Понятно, что модели Кули–Тьюки применимы не только для размерностей преобразований кратных степени двойки, но и для произвольной комбинационной размерности.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена новая схема построения алгоритма быстрого преобразования Фурье. Преимущество предложенной схемы заключается в том, что её сложность сохраняется неизменной независимо от значения и композиционного представления размерности ДПФ преобразования. Новое качество достигается за счёт стратификации модельных представлений на топологическую и параметрическую составляющие. Топологическая модель не зависит от вида преобразования и строится согласно принципам структурного построения самоподобных нейронных сетей [9]. Выбор топологической модели многовариантен, что позволяет учесть дополнительные требования к построению БПФ. В работе предложены

топологические модели, которые обеспечивают естественный порядок следования спектральных коэффициентов на выходе алгоритма БПФ по возрастанию частоты. Показано, что классические схемы БПФ алгоритмов Кули–Тьюки можно полностью выразить в новых представлениях. Рассмотренная схема может быть использована для построения быстрых алгоритмов преобразований Уолша–Адамара, Хаара и других подобных ортогональных преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cooley J.W. and Tukey J.W. "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," *Math. Comput.*, vol. 19, no. 2, pp. 297-301, April 1965.
- [2] Michael T. Heideman•Don H. Johnson C. Sidney Burrus Gauss and the History of the Fast Fourier Transform *IEEE ASSP MAGAZINE* october1984, pp. 14-21.
- [3] Gauss C.F., "Nachlass: Theoria interpolationis methodo nova tractata," pp. 265-303, in earl Friedrich Gauss, Werke, Band 3, Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1866.
- [4] Good I.J., "The interaction algorithm and practical Fourier analysis," *J. R. Statist. Soc. B*, vol. 20, no. 2, pp. 361-372, 1958. Addendum in *J. R. Statist. Soc. B*, vol. 22, no. 2, pp. 373-375, 1960.
- [5] Matteo Frigo and Steven G. Johnson The Design and Implementation of FFTW3 Published in *Proc. IEEE*, vol. 93, no. 2, pp. 216–231 (2005).
- [6] Дорогов А.Ю. Быстрые преобразования и самоподобные нейронные сети глубокого обучения. Часть 1. Стратифицированные модели самоподобных нейронных сетей и быстрых преобразований // *Информационные и математические технологии в науке и управлении*. 2023. № 4(32). С. 5-20.
- [7] Дорогов А.Ю. Быстрые преобразования и самоподобные нейронные сети глубокого обучения. Часть 2. Методы обучения быстрых нейронных сетей // *Информационные и математические технологии в науке и управлении*. 2024. № 1(33). С. 5-19.
- [8] Дорогов А.Ю. Быстрые преобразования и самоподобные нейронные сети глубокого обучения. Часть 3. Пирамидальные нейронные сети с глубокой степенью обучения // *Информационные и математические технологии в науке и управлении*. 2024. № 2(34). С. 19-32.
- [9] Дорогов А.Ю. Самоподобные нейронные сети быстрого обучения. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2024. 188 с. www.dorogov.su.