

Двухкватернионный сигма-точечный фильтр Калмана (DQ-MUKF) для относительной навигации в малых группах взаимодействующих объектов

Жак Б. Нгуа Ндонг Авеле

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

Россия avelejacques@yahoo.fr

В. К. Орлов

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

vkorlov@etu.ru

Аннотация. Наш проект разрабатывает вычислительно эффективный и численно стабильный сигма-точечный фильтр Калмана (MUKF), специально разработанный для относительной навигации трёх взаимодействующих космических аппаратов PocketQube. Используя двойственный кватернион, алгоритм объединяет трансляционную и вращательную динамику в единую алгебраическую структуру, эффективно управляя высокой степенью нелинейности, присущей связанному орбитальному и ориентационному движению. Наше исследование сначала устанавливает модель распространения кинематического состояния с двойными кватернионами и формулировку ошибок, сохраняющую единичные ограничения многообразия. Впоследствии реализуется стохастическая техника сигма-точечного отображения с помощью неароматного преобразования (UT) для распространения неопределённостей без ошибок линеаризации, типичных для расширенных фильтров Калмана. Наконец, численное моделирование демонстрирует, что MUKF достигает лучшей сходимости и устойчивости по сравнению с традиционными методами. Результаты показывают, что ошибки оценки остаются стабильно в пределах ковариационных границ, с минимальными ошибками относительного расстояния и последовательностью инноваций с нулевой средней, что подтверждает беспримечательность фильтра и его устойчивость в замкнутом цикле для роя спутников малого масштаба.

Ключевые слова: кинематика двойных кватернионов, мультипликативный неароматный фильтр Калмана (MUKF), относительная навигация, спутниковые созвездия PocketQube, оценка состояния SE (3), аэрокосмическое моделирование в MATLAB/Simulink

I. ВВЕДЕНИЕ

Эволюция спутниковых технологий прошла путь от массивных монолитных платформ к распределённым из небольших модульных устройств, называемых PocketQubes. Эти пико спутники, обычно измеряющие $5 \times 5 \times 5$ см, представляют особую сложность с точки зрения относительной навигации в малых и больших группах и полётов в построениях благодаря своей строгой мощности и вычислениям. Например, в небольшой группе взаимодействующих PocketQube сохранение точного относительного положения и ориентации крайне важно для успеха миссии, будь то для координированных наблюдений. Использование двойственных кватернионов обеспечивает единую

математическую основу, которая одновременно представляет вращательную и трансляционную кинематику, тем самым избегая особенностей и неэффективности, связанных с углами Эйлера или отдельными векторно-матричными представлениями [1].

Для устранения нелинейностей, присущих орбитальной механике и измерениям датчиков, мультипликативный фильтр Калмана без запаха используется как надёжный инструмент оценки. В отличие от стандартного расширенного фильтра Калмана, который основан на локальной линеаризации с помощью матриц Якобиана, фильтр Калмана без запаха использует детерминированный метод дискретизации, известный как неароматное преобразование. Мультипликативный аспект мультипликативного фильтра Калмана без запаха особенно важен для оценки положения, поскольку он обеспечивает естественное сохранение нормы кватернионов за счет представления состояния ошибки как малого вращения, а не как простой аддитивной разности [1].

В построении из трёх PocketQube задача относительной навигации превращается в задачу многоагентной координации, где каждый узел должен оценивать своё состояние относительно соседей с помощью ограниченных бортовых датчиков, таких как межспутниковые каналы. Однако интеграция двойственной кватернионной алгебры в мультипликативную неароматизированную фильтровую структуру Калмана позволяет получить вычислительно эффективную, но очень точную оценку относительного движения 6-DOF [2].

Используя компактное представление двойственных кватернионов, фильтр уменьшает количество представлений этих кватернионов и количество параметров, необходимых для описания относительного преобразования между тремя спутниками [2]. Это оптимизирует ограниченную вычислительную мощность бортового компьютера PocketQubes, сохраняя при этом необходимую надёжность для сложных операций приближения [2].

II. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

A. Математическая формулировка фильтра Калмана без запаха (UKF) на основе подхода двойственного кватерниона

Первый шаг в нашем подходе опирается на математические основы фильтра Калмана без запаха, основанного на двойственном кватернионном подходе. Эти математические основы основаны на алгебре двойственных чисел, применяемой к кватерниону Гамильтона. Двойственный кватернион \hat{q} определяется как $\hat{q} = q_r + \varepsilon q_d$, где q_r — вещественная часть, всегда представляющая вращение, q_d — двойственная часть, представляющая сдвиг, а ε — двойственная единица такая, $\varepsilon^2 = 0$ что. Для относительной навигации между тремя взаимодействующими PocketQube сат-вектор учитывает относительную позу, такую как положение и ориентацию, а также их соответствующие скорости, такие как линейные и угловые скорости, в архитектуре лидера-последователя [3].

Для формулировки фильтра Калмана без аромата сначала необходимо определить модель переходов состояний с использованием двойственной кватернионной алгебры. Относительная позиция последователя PocketQube относительно лидера выражается следующим образом:

$$\hat{q}_{f/l} = q_r + \varepsilon \frac{1}{2} r_{f/l}^l \otimes q_r, \quad \text{где } q_r \text{ — единичный}$$

кватернион для относительной ориентации, $r_{f/l}^l$ а — вектор относительного положения, выраженный в системе отсчёта лидера. Кинематическое дифференциальное уравнение, управляющее этим движением, задаётся $\dot{\hat{q}}_{f/l} = \frac{1}{2} \hat{q}_{f/l} \otimes \hat{\omega}_{f/l}^f$. В этом

выражении $\hat{\omega}_{f/l}^f$ обозначает двойственную

$$\hat{\omega}_{f/l}^f = \omega_{f/l}^f + \varepsilon \left(v_{f/l}^f + \omega_{f/l}^f \times r_{f/l}^l \right)$$

скорость, интегрирующую как угловую скорость ω , так и v скорость. Таким образом, в нашем подходе для трёх взаимодействующих PocketQube фильтр следует двойственному $\hat{q}_{2/1}$ кватерниону и $\hat{q}_{3/1}$, где лидер PocketQube PQ_1 служит началом координат опоры [5].

Фильтр Калмана без запаха работает за счёт генерации набора точек сигма, которые фиксируют среднее значение и ковариацию состояния. Однако, поскольку унитарный двойственный кватернион лежит на неевклидовом многообразии, стандартный аддитивный безароматный фильтр Кальмана не может использоваться, поэтому требуется мультипликативный неароматный калмановский фильтр. Ошибка состояния

представлена шестимерным $\delta \xi = \left[\delta \Phi^T, \delta r^T \right]^T$ вектором,

где $\delta \Phi$ — ошибка вращения, а δr — ошибка переноса. Имея оценку \hat{x}_k состояния и ковариацию P_k в k момент времени, $2n+1$ сигма-точки (где $n=12$ представляют полное относительное состояние спутника с 6 степенями свободы) порождаются $\chi_i = \hat{x}_k + \text{col}_i \left(\pm \sqrt{n+\lambda} \right) p_k$ как

Для $\hat{q}_i = \exp \left(\frac{1}{2} \delta \xi_i \right) \otimes \hat{q}_k$, где $\exp(\cdot)$ для двойственного кватерниона преобразует 6D-вектор ошибки в небольшой прирост двойственного кватерниона [3].

Каждая сигма-точка распространяется через нелинейную двойственную кватернионную динамику и задаётся $\hat{q}_{i,k+1|k} = f \left(\hat{q}_{i,k}, \hat{\omega}_{i,k}, \Delta t \right)$. Предсказанное среднее $\hat{x}_{k+1|k}$ вычисляется путём определения

внутренней средней по многообразию, часто с помощью итеративного алгоритма Кархера, поскольку простое взвешенное среднее не сохраняет унитарную норму двойственного кватерниона [5]. Для трёх PocketQube вектор измерения z_k включает относительные векторы прямой видимости и задаётся как

$$z_{i,k+1} = h \left(\hat{q}_{i,k+1|k} \right) + v_k. \quad \text{Предсказанное измерение } \hat{z}_{k+1}$$

и инновационная ковариация P_{zz} вычисляются с помощью взвешенных сигма-точек и выражаются как

$$P_{zz} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} \left[z_{i,k+1} - \hat{z}_{k+1} \right] \left[z_{i,k+1} - \hat{z}_{k+1} \right]^T + R_k.$$

Коэффициент Калмана K_k затем выводится из перекрёстной ковариации P_{xz} и задаётся как

$$K_k = P_{xz} P_{zz}^{-1}.$$

Обновление состояния выполняется путём сведения инновации до двойственного кватернионного многообразия и выражается следующим

$$\text{образом: } \hat{q}_{k+1} = \exp \left(\frac{1}{2} K_k \left(z_k - \hat{z}_{k+1} \right) \right) \otimes \hat{q}_{k+1|k} \quad [3].$$

В сценарии, требующем три PocketQube PQ_1, PQ_2, PQ_3 , фильтр Калмана без запаха обычно отвечает за связь между относительными состояниями. Пусть PQ_1 — ведущий PocketQube нашей системы,

фильтр оценивает $\hat{X} = \left[\hat{q}_{2/1}, \hat{q}_{3/1}, \hat{S}_2, \hat{S}_3 \right]^T$, где \hat{S} представляет состояния двойственной скорости [3].

B. Математическая формулировка мультипликативного безароматного фильтра Калмана (MUKF) на основе подхода двойственных кватернионов.

Мультипликативный фильтр Кальмана без аромата отличается от стандартного фильтра Кальмана без аромата тем, что сохраняет ограничения единицы двойственного кватерниона с помощью подхода с ошибкой. Вместо прямого добавления шума в двойственный кватернион ошибка изображается мультипликативным возмущением. В двойственном кватернионе $\hat{q} = \hat{q} \otimes \delta \hat{q}(\delta \theta, \delta r)$, где кватернион двойной ошибки $\delta \hat{q}$ параметризуется малым вектором, таким

как $\delta \xi = \left[\delta \theta^T, \delta r^T \right]^T$, и где параметр $\delta \theta$ представляет

ошибку положения, а также ошибку трансляции. При использовании мультипликативного безароматного Кальмана сигма-точки обозначаются следующим образом: $\delta \xi_i = \pm \sqrt{(L+\lambda)} P_k$ для $i = 1, \dots, 2L$. Эти точки

преобразуются в двойственный кватернион ошибки $\delta\hat{q}_i$, используя экспоненциальное отображение, которое выражается как

$$\delta\hat{q}_i = \exp(\delta\xi_i) = \left[\cos\left(\frac{\|\delta\xi_i\|}{2}\right), \frac{\delta\xi_i}{\|\delta\xi_i\|} \sin\left(\frac{\|\delta\xi_i\|}{2}\right) \right],$$

а сигма-точки состояния затем выражаются следующим образом. Каждая сигма-точка распространяется через нелинейную кинематику PocketQube, задаваемую как $\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2}\hat{q} \otimes \hat{\omega}$, где $\hat{\omega} = \omega + \varepsilon(v + \omega \times r)$ обычно равна двойственная скорость [4].

В отличие от стандартного нелинейного фильтра Калмана, который использует взвешенное арифметическое значение, мультипликативный нелинейный фильтр Калмана вычисляет внутреннее среднее по многообразию. Предсказанное среднее \hat{q}_{k+1}^- получается итеративным решением двойственного кватерниона, который минимизирует квадратично-взвешенное расстояние до сигма-точек. Предсказанная ковариация P_{k+1}^- вычисляется в касательном пространстве и выражается следующим образом [4].

$$P_{k+1}^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i \delta\xi_i \delta\xi_i^T$$

Для взаимодействующих PocketQubes модель измерения выражается как $v_i = z - h(\hat{Q}_i)$. Таким образом, коэффициент усиления Калмана K можно применить к 6D-вектору ошибки, который затем используется для обновления состояния с помощью метода двойственных кватернионов, и в этом случае его можно выразить следующим образом. Это мультипликативное обновление гарантирует, что три взаимодействующих PocketQube сохраняют свою геометрическую целостность даже при условиях высокой маневренности или при операциях близкого контакта, когда линейные приближения многообразия $SE(3)$ не работают [4].

Мультипликативный фильтр Калмана без аромата превосходит в этом сценарии, поскольку при взаимодействии PocketQube относительные позы легко обрабатываются с помощью двойственного кватернионного деления, но при использовании стандартного фильтра Калмана с неароматизированным фильтром сложно моделировать относительные ограничения $SE(3)$ [4].

C. Реализация алгоритма Multicative Unscented Kalman Filter (MUKF) на Matlab/Simulink

Первый шаг в нашем моделировании трёх PocketQube в рою, используя среду Matlab/Simulink, заключается в строгой формулировке псевдокода относительной навигации и математического алгоритма мультипликативного бесароматного мультипликативного фильтра Калмана, основанного на

двойных кватернионах для роя из 3 PocketQube, что видно на рис. 1 и 2.

Algorithm 1: Pseudo-code of quaternion navigation multiplicative unscented Kalman filter for swarm of 3 PocketQubes

```

% Initialization states and covariance:
state = initialize_state(); % position, velocity, quaternion
covariance = initialize_covariance();
for each time step
    % Generate sigma points
    sigma_points = generate_sigma_points(state,
covariance);
    % Propagate sigma points through dynamics
    for each sigma_point
        sigma_point = propagate_dynamics(sigma_point);
    end
    % Calculate predicted state and covariance
    [predicted_state, predicted_covariance] =
compute_predict(sigma_points);
    % Measurement update
    measurement = get_measurement();
    [innov, S] = compute_innovation(measurement,
predicted_state);
    % Compute cross covariance
    cross_cov = compute_cross_covariance(sigma_points,
predicted_state);
    % Kalman gain
    K = cross_cov / S
    % Update state and covariance
    state = update_state(predicted_state, K, innov);
    covariance = update_covariance(predicted_covariance, K,
S);
    % Compute relative acceleration using Clohessy-
Wiltshire equations
    rel_accel = compute_clohessy_accel(state);
    % Print current state
end

```

Рис. 1. Псевдокод относительной навигации мультипликативного неароматизированного фильтра Калмана на основе двойных кватернионов для роя из трёх PocketQube

Во-вторых, рис. 2 и 3, показывающие соответственно векторы прямой видимости (LOS), а также анализ истинного пространственного расстояния и значений измерения между PQ_1 и PQ_3 , иллюстрируют траекторию графиков дальности и демонстрируют три характеристики PocketQubes высокопроизводительного мультипликативного не ароматизированного фильтра Калмана.

Дисперсия уменьшается со временем, что означает, что фильтр систематически уменьшает след матрицы задней ковариации P^+ , минимизируя тем самым минимальную среднеквадратичную ошибку (MMSE) в оценщиках типа Калмана.

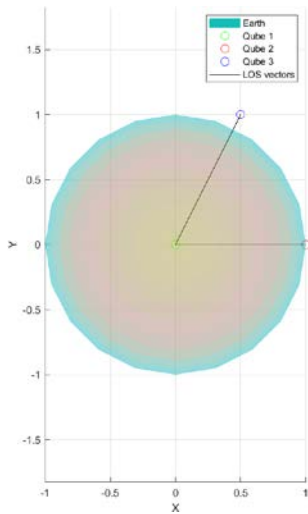


Рис. 2. Иллюстрация векторов прямой видимости (LOS) для относительной навигации по PocketQube

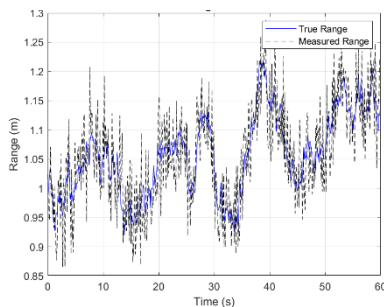


Рис. 3. Иллюстрация истинных значений пространственного расстояния и диапазона измерения между основным PocketQube PQ_1 и последовательным PocketQube PQ_3

III. РЕЗУЛЬТАТЫ

Анализ эффективности мультипликативного неароматизированного фильтра Калмана предоставляет важную информацию о стабильности оценки состояния для взаимодействующих формаций PocketQube. Результаты показывают, что фильтр не систематически завышает и не недооценивает диапазон, тем самым подтверждая, что мультипликативное обновление двойственных кватернионов правильно сохраняет ограничение унитарной нормы на кватернион вращения без систематического смещения через ренормализацию. Это значительное улучшение по сравнению с традиционными представлениями с помощью углов Эйлера, которые часто страдают от особенностей или требуют иногда вычислительно затратных шагов нормализации, ухудшающих согласованность фильтра.

IV. ОБСУЖДЕНИЕ

Устранение систематического смещения через мультипликативное обновление представляет собой важный шаг вперёд в области высокоточной навигации, например, новый прогресс в относительной навигации взаимодействующих PocketQube с использованием мультипликативного фильтра Калмана с использованием двухкватернионного мультипликативного безароматного фильтра Калмана. Избегая перенормировки, мультипликативный фильтр Калмана без запаха гарантирует, что ковариационная матрица P , отражающая неопределённость оценки состояния, точно отражает физическую дисперсию позы.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В конечном счёте, геометрический анализ линии видимости (LOS) подтверждает это PQ_2 и PQ_3 правильно сохраняет невырожденные и отдельные позиции относительно лидера PocketQube PQ_1 , тем самым подтверждая навигационное решение как надёжную структуру для поддержания автономного построения.

Важно отметить, что мультипликативный фильтр Калмана на основе двух кватернионов эффективно смягчает нелинейности, присущие мультиагентной относительной динамике, обеспечивая стабильную оценку вектора относительного $\hat{x} = [\hat{q}, r]^T$ состояния даже при ограниченных вычислительных ресурсах, как это обычно бывает с платформами PocketQube.

Наша будущая работа будет сосредоточена на интеграции межспутниковых мер связи для дальнейшего совершенствования точности относительного позиционирования, обеспечивая способность формирования выполнять сложные манёвры, сохраняя при этом ограничения по близости, необходимые для успеха миссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жак Б. Нгуа Ндонг Авеле, Далия А. Караф и Владимир К. Орлов. "Симуляция системы управления роём наноспутников PocketQube с помощью линейного квадратичного регулятора" // Eng. Proc. 2026, 124(1), 3. DOI: 10.3390/ENGPROC2026124003
- [2] Л. Чжан, Т. Ли, Х. Ян, С. Чжан, Х. Цай и С. Цянь. "Фильтрация Калмана без запаха для относительного положения космического аппарата и оценки положения" // Журнал навигации, том 68, выпуск 3, май 2015, стр. 528-548. DOI: 10.1017/S0373463314000769
- [3] Р. Занетти и К. Дж. Марс. «Полностью мультипликативный фильтр Калмана без запаха для оценки настроения» // Журнал руководства, контроля и динамики. Том 41. No5, май 2018 года. DOI:10.2514/1.G003221
- [4] Й. Чихаби и С. Ульрих. "Нелинейная адаптивная относительная навигация только по углам на пертурбированных эксцентрических орбитах" // Acta Astronautica, том 228, март 2025, стр. 494-514. DOI:10.1016/j.actaastro.2024.